Übungsblatt 8

Abgabetermin: 01.06.2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Charakterisieren Sie die Graphen, welche eine (nicht unbedingt geschlossene) Tour enthalten, die alle Kanten genau einmal enthält.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) Ist $T = (V, E')$ ein aufspannender Baum von einem Graphen $G = (V, E)$ und ist e eine beliebige Kante aus $E \setminus E'$, dann enthält der Graph $G + e$ genau einen Kreis.

(b) Ist T ein aufspannender Baum eines Graphen G, dann gibt es für jede Kante $e \in E(G) \setminus E(T)$ eine Kante $e' \in E(T)$, so dass $(T - e') + e$ wiederum ein aufspannender Baum von G ist.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für ein konvexes Viereck $ABCD$ die Ungleichungen

$$|AB| + |CD| \leq |AC| + |BD| \text{ und } |AD| + |BC| \leq |AC| + |BD|$$

gelten.

(b) Betrachten Sie eine Menge V von n Punkten in der Ebene. Definieren Sie eine Gewichtsfunktion auf der Kantenmenge des vollständigen Graphen auf V: Das Gewicht einer Kante xy ist der Abstand der Punkte x und y. Zeigen Sie, dass kein minimal aufspannende Baum dieses gerichteten Graphen eine Ecke vom Grad 7 oder höher hat.

(c) Zeigen Sie, dass es einen minimal aufspannenden Baum des Graphen von (b) gibt, dessen Kanten nicht kreuzen.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Sei G ein zusammenhangender Graph, in dem je zwei verschiedene Ecken u, v entweder 0 oder 5 gemeinsame Nachbarn haben. Beweisen Sie, dass G k-regulär (jede Ecke hat Grad k) ist für eine Zahl k.